CogMaster

Raisonnement

Mémoire de M2 pour le cours FCS3

L'Intuition en Mathématiques
et son rôle vis-à-vis des *Monstres*

Auteur :
Mathias Sablé Meyer

Encadrant :
Emmanuel Sander

"Dans les sciences même les plus sévères, aucune vérité n'est éclose du génie des Archimèdes et des Newtons sans une émotion poétique et je ne sais quel frémissement de la nature intelligente"

Daunou, *Bulletin de la Société de Philosophie*, tome 28, 1928, p. 18

Le 23 janvier 2017

Bibliographie

[1] *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine Mathématique*, 1945, de Jacques HADAMARD inspiré d'Henri POINCARÉ

[2] *L'Analogie, Cœur de la pensée*, 2013, de Douglas HOFSTADTER et Emmanuel SANDER

[3] "The Cognitive Foundations of Mathematics : The Role of Conceptual Metaphor" dans *Handbook of Mathematical Cognition*, 2005, de Rafael NÚÑEZ et George LAKOFF — *Where Mathematics Comes From* des mêmes auteurs, 2010, premiers chapitres.

Table des matières

1 Introduction

L'introspection des mathématiciens mène presque systématiquement à la description d'une forme très particulière d'intuition, qui peut prendre diverses formes mais possède comme caractéristique d'être centrale dans beaucoup de raisonnements. Si cette intuition ne semble pas partagée par toute la population via l'introspection des individus, il n'en est pas moins clair que chacun dispose de certaines formes d'intuitions sur les objets mathématiques de base : les opérations élémentaires et la géométrie euclidienne, par exemple, sont très sujets à ce genre de proto-intuitions que les non mathématiciens peuvent rapporter.

Pendant longtemps l'étude de cette intuition a relevé du domaine de la philosophie et était menée par des mathématiciens principalement, qui tentaient de comprendre l'origine de leurs intuitions. Ainsi on vit s'opposer des courants de pensée dans lesquels les mathématiques étaient le fruit d'inventions, les objets naissants de l'esprit humain, et des courants de pensée dans lesquels il s'agissait de découvertes — voir le monde de la réalité mathématique intemporelle de Platon : saisir l'origine des mathématiques et des objets mathématiques est un défi à maintes facettes. En effet, si dans sa construction la plus pures la mathématique traite d'objets abstraits sans connexion avec le réel, il est évident d'une part qu'elle est le fruit d'une construction neuronale et non d'un monde abstrait et intangible, et d'autre part qu'elle émerge souvent par nécessité d'expliquer le monde réel pour ensuite tenter de se libérer de cette emprise matérialiste — la géométrie nait de la rationalisation de l'espace par exemple.

Enfin on ne peut négliger une introspection fortement liée à la beauté et à l'esthétique chez les mathématiciens, qui semblent même parfois y trouver la justification même des mathématiques plus que dans leur réalisation pratique de compréhension du monde.

Je vais ici étudier l'intuition en mathématique sous plusieurs angles et avec une bibliographie qui adopte des points de vus complémentaires que je vais tenter d'unifier : je vais travailler sur une œuvre de Jacques Hadamard, mathématicien français pré-bourbakiste, qui nous livre un ouvrage de pur introspection, la sienne et celle de Henri Poincaré, mais avec un regard enrichi par les travaux de son époque sur le rôle de l'inconscient. Je vais aussi travailler sur un ouvrage de Douglas Hodstadter et Emmanuel Sander sur l'analogie et lier l'analogie au carburant de l'intuition dans le raisonnement mathématique. Enfin, je vais m'intéresser à une approche différente dans laquelle le sujet d'étude n'est plus l'homme mais la mathématique, qui reconstruit a posteriori l'esprit à partir de ce qu'il a été capable de créer dans ce domaine, à travers le livre de George Lakoff et Rafael Nùñez.

HADAMARD voit l'invention mathématique comme un double processus, qui fonctionne à des échelles de temps opposés, d'incubation et d'illumination. Je vais lier sa vision de l'incubation à celle de l'analogie non-consciente et montrer que l'illumination est à relier à l'esthétique mathématique — et par conséquent, en regard de cela, que ce que les mathématiciens s'accordent à appeler des monstres sont des objets qui, s'ils sont formellement bien définis, violent soit la notion d'analogie soit celle d'esthétique.

2 De l'incubation à l'illumination

> "Le véritable processus de pensée dans la construction d'un raisonnement mathématique est certainement plutôt à comparer avec [...] l'acte de reconnaître quelqu'un"
>
> J. HADAMARD, [1]

Cette partie est essentiellement basée sur le travail de J. HADAMARD qui emploie son introspection, mais aussi les retours de nombreux autres mathématiciens et en particulier la conférence de Henri POINCARÉ en 1908 devant la Société de Psychologie, intitulée *L'invention Mathématique*, pour décrire sa compréhension de l'intuition mathématique, qui selon lui se décompose en deux étapes, l'*incubation* et l'*illumination*.

On étudie ici un pan de l'intuition qui n'est pas celui que le mathématicien a l'habitude d'utiliser tout les jours dans son travail, on ne parle pas de l'intuition qu'il a sur des objets qu'il maîtrise parfaitement, mais bien de cas où un champs nouveau entier s'ouvre à lui lorsqu'il a l'intuition soudaine d'un chemin menant à la résolution d'un problème.

2.1 La genèse de sa réflexion

Commençons par remarquer qu'à son époque deux écoles s'affrontent sur le sujet, l'une menée par P. SOURIAU prônant le hasard pur comme fondement et aboutissement de l'intuition mathématique, et l'autre menée par F. PAULHAN qui pense les mathématiques fondées sur la logique pure et le raisonnement. La première explication est vite rejetée, le hasard seul ne suffit pas puisque d'une part cette illumination est liée au travail en cours du mathématicien d'une façon ou d'une autre, et d'autre part parce que cette vision des choses tenterait d'expliquer des "effets sans cause" selon les mots de HADAMARD.

L'approche purement rationnelle et logique a été celle adoptée par Bertrand Russel dans les *Principia Mathematica*, il est plus délicat de dire qu'elle n'aboutit pas mais les travaux de Kurt Gödel dans son ouvrage *Sur les propositions formellement indécidables des Principia Mathematica et des systèmes apparentés* montre que la fondation logique complète des mathématiques est illusoire puisqu'une théorie suffisamment expressive, cohérente et non contradictoire ne pourra jamais démontrer sa propre cohérence. Notons quand même que ces travaux sont postérieurs à Hadamard et qu'ils ne remettent pas la démarche du mathématicien mais bien l'illusion de fondation de tout objet sur la logique formelle.

Hadamard tente d'associer hasard et logique dans son approche : pour lui, l'intuition provient d'un double processus. Le premier est de l'ordre du *cogito* latin, littéralement "agiter ensemble", il s'agit de mélanger et d'associer librement des concepts en lien avec le problème donné — il s'agit ici d'un phénomène fondamentalement aléatoire. Le second est cette fois à comparer à l'*intelligo*, le "choisir parmi", il consiste à avoir la capacité de piocher dans ce mélange aléatoire de concepts pour en extraire les idées pertinentes qui mènent à la résolution d'un problème.

Il s'agit là des étapes *inconscientes*, auxquels viennent s'ajouter deux étapes conscientes que sont la préparation, travail laborieux mais indispensable comme nous le verrons, et la vérification, ou formalisation, qui consiste à coucher sur le papier l'intuition et par là même à la vérifier. Le processus total est donc le suivant, avec les étapes (i) et (iv) conscientes et les étapes (ii) et (iii) non conscientes :

(i) Préparation
(ii) Incubation
(iii) Illumination
(iv) Vérification et formalisation

Les parties suivantes porteront plutôt sur celles qu'on l'on qualifierait naturellement d'intuition, c'est à dire les parties *inconscientes* (ii) et (iii).

2.2 Les caractéristique de l'incubation

Ce n'est pas l'étape qui marque le plus les esprits. On n'en connait l'existence que par déduction, elle passe inaperçue auprès de celui qui la vit autant que de ceux qui l'observent, et pourtant dans les cas rapportés elle ne peut qu'exister.

Cette étape semble nécessaire à la création mathématique : il s'agit d'une période pendant laquelle le mathématicien, après un effort conscient et important sur un problème donné, le met de côté et se concentre sur autre choses

— d'autre problèmes de mathématiques ou totalement autre chose, la conférence de H. Poincaré donne l'exemple d'un rendez-vous géologique qui lui fait oublier tout son travail en cours.

Le travail introspectif dont Poincaré fait preuve lui fait décrire un phénomène que j'ai moi même entendu rapporté par des collègues mathématiciens : l'insomnie pendant laquelle le processus d'amalgame se déroule et est perceptible. Il décrit ressentir "les idées surgir en foule, [les sentir] comme se heurter", mais affirme aussi que cette création n'est pas fructueuse en elle-même, que les idées ne font pas sens, qu'elles ne convergent pas vers un résultat : il décrit avoir le sentiment de voir son subconscient associer toutes les idées possibles qu'il a eu sur le sujet en question.

Imprégné du travail de son époque sur l'inconscient, Hadamard en déduit qu'il s'agit effectivement d'un processus qui se déroule continument dans l'esprit du mathématicien et qui est non conscient — il dit parfois "en conscience marginale" — qui perdure jusqu'à ce qu'un association soit fructueuse. Certains ont avancé d'autres hypothèses sur cette étape, que l'on peut regrouper de deux façons :

(i) Le repos rendrait le cerveau "disponible" et donc plus efficace

(ii) Penser à autre chose écarte les mauvaises pistes dans lesquels s'engouffrait auparavant le sujet

Cependant ces deux hypothèses ne survivent pas à une étude plus approfondie, en effet elles reviennent en partie à nier la partie consciente, laborieuse et longue du travail préparatoire qui est pourtant centrale dans l'incubation et l'illumination. De plus l'analyse nous montre que la nature de l'illumination est fondamentalement différente de celle du travail conscient et antérieur : proposer de simplement remplacer l'une par l'autre n'est pas vraisemblable parce qu'ils s'agit de phénomènes incomparables Enfin l'hypothèse de l'oubli ne coïncide pas avec l'introspection des mathématiciens qui n'ont pas conscience de voies qui ne mène nulle part mais plutôt d'une absence totale de progression possible dans la période qui précède l'illumination.

Il conclut sur l'idée qu'il faut voir dans cette caractérisation de l'intuition la preuve d'une coopération entre le conscient et l'inconscient, le premier effectuant le travail préliminaire ainsi que la partie formelle de vérification alors que l'inconscient traite une tâche cognitive difficile d'exploration et de sélection.

2.3 Les caractéristiques de l'illumination

En parcourant les descriptions disponibles de ceux qu'il considèrent comme de grands mathématiciens, à savoir Poincaré, Helmoltz, Langevin et

Ostwaltd, Hadamard dresse un tableau des caractéristique communes de ce qu'il se décide à qualifier d'*illumination*. Par exemple, elle est "brève", "soudaine", "certaine", "immédiate", "inattendue", "par la grâce de Dieu", il s'agit d'un "éclair subit".

Elle survient à un moment qui peut tout à fait n'avoir aucun lien avec le problème étudié, ainsi Poincaré décrit-il un souvenir très clair d'*illumination* alors qu'il montait dans un autobus *et* qu'il était en pleine discussion avec des amis, discussion qui, nous dit-il, ne portait pas sur les mathématiques. Il rapporte aussi que la solution qu'il a alors perçus dans son ensemble n'en était pas pour autant simple, puisque que pour la formaliser, la vérifier dans tous les cas possibles et la rédiger il lui a fallu plusieurs heures de travail.

Ce que nous apprend cette description c'est qu'il existe un autre module, qui peut communiquer avec le conscient, capable de cerner la validité, et ici Hadamard utilise aussi le terme de beauté, d'une association aléatoire d'idée, pour constater qu'elle est pertinente pour le problème donné et par conséquent qu'il faut l'étudier plus en profondeur.

Ici [3] dirait que l'illumination vient du bootstrap entre l'engendrement d'idées qui proviennent du domaine des mathématiques et une métaphore intuitive sur le caractère des objets manipulés. Pour prendre un exemple concret d'une intuition naissante chez un jeune enfant plutôt que chez un mathématicien aguerri, la manipulation de petits ensemble et la subitisation [1] lui ont donné une métaphore naïve de l'addition et de la soustraction de tout petits ensembles — nombres de un à quatre et auxquels on ajoute ou enlève un. Maintenant, face à un problème apparemment complexe de soustraction, sans doute il explorerait les méthodes formelles qu'il maîtrise (et en aurait vite fait le tour), jusqu'au moment où son intuition naïve du nombre comme cardinal d'un ensemble — voir [3] sur ce point — lui permet de réaliser qu'il peut littéralement résoudre ce problème avec ses doigts et des opérations qui ne sont pas plus compliqués que ce qu'il sait déjà faire. C'est l'étape d'illumination, qui va vite mener à la vérification formelle à savoir effectivement compter sur ses doigts, et avec un peu de chance au premier succès non trivial du mathématicien en herbe.

2.4 Que retenir ?

Nous sommes donc en face d'un processus complexe d'association d'idée, elles mêmes de degré de complexité très variable, et inventer c'est être capable de filtrer, de choisir dans ces associations d'idées celle qui répond au problème donné, le tout se déroulant hors du domaine du conscient. Il convient alors de

1. Capacité à compter immédiatement les ensembles à peu (3 à 4 au plus) d'éléments

considérer le bon mathématicien plutôt comme celui qui dispose d'une bonne fonction de choix et de nombreuses idées déjà disponibles plutôt que de celui qui ferait les *bonnes* associations d'idées, parce que l'introspection des divers mathématiciens semble plutôt converger vers l'idée que l'étape d'association d'idées est fondamentalement aléatoire.

3 L'intuition et l'analogie

> "Les mots et le langage, écrits ou parlés, ne semblent pas jouer le moindre rôle dans le mécanisme de ma pensée"
>
> Lettre de A. EINSTEIN à J. HADAMARD

De nombreux auteurs, et notamment HOFSTADTER et SANDER, conçoivent l'analogie comme étant centrale dans la pensée et en particulier dans le raisonnement. Je vais d'abord établir un lien fort avec la partie précédente, puis étendre le champ de l'intuition pour couvrir celle des non-mathématiciens, et aussi pour tenter d'en comprendre les limites.

Notons d'abord que, sans parler des mathématiques mais plutôt du raisonnement, nous savons déjà pertinemment à quel point l'analogie, superficielle ou non, est parfois importante : comparer une situation à une autre, de façon directe ou de façon caricaturale, est souvent utilisé pour entrainer la réflexion dans une direction donnée, et ce de façon tout à fait consciente et explicite. Mais les analogies sont aussi et surtout non consciente et sont derrière toutes les prises de décisions — ou presque.

3.1 L'analogie comme carburant de l'incubation

La partie précédente s'intéresse à l'intuition des *experts*. Mais qu'est ce qu'un expert ? Étant donné nos considérations dans la première partie, un expert n'est pas seulement celui qui dispose de nombreuses "idées", ou de nombreuses catégories d'analogies, mais aussi celui qui est capable de les assembler ensemble, d'effectuer des associations d'idées et des glissements catégoriels, puis ensuite de sélectionner ce qui est pertinent.

Ce phénomène est aussi à l'œuvre chez les non-experts, mais les analogies, plutôt que de s'attacher à ce qui characterise fondamentalement les objets, s'attachent à des propriétés superficielles mais saillantes. Par exemple ils ont une analogie intuitive de l'addition comme un procédé qui fait "augmenter", croître, et on constate chez eux une difficulté lorsqu'il s'agit de proposer un problème qui nécessite d'utiliser une addition pour être résolu, mais tel que l'addition ne fasse pas s'accroisse le résultat — voir [2] pour de nombreux exemples avec l'addition et la division et l'influence des diverses analogies fondant l'intuition.

Ainsi [2] nous montre que les analogies naïves peuvent être utiles dans certaines conditions où le raisonnement et l'analogie sont en adéquation, mais parfois les directions opposés entre les deux mènent les gens à des erreurs qui montrent qu'ils ne maitrisent pas fondamentalement ce qu'ils font — voir l'expérience "Un litre d'essence coûte 1.349€, combien coûte 0.23 litres d'essence ?" à comparer avec "Un litre d'essence coûte 1.349€, combien coûtent 3 litres d'essence ?".

Il faut donc pour accéder à l'intuition commencer par maîtriser les objets et avec eux les analogies qui leurs sont associées, de sorte que la phase d'incubation fasse sens et que les idées formées puissent effectivement mener vers un résultat.

3.2 Experts, novices et pièges conceptuel

Si l'on pourrait s'imaginer que le propre de l'expert est de ne plus faire d'analogie mais de raisonner sur son objet d'étude directement, et l'on sera tenté de le faire pour les mathématiques puisqu'elles sont vues comme logiquement fondées, froides et abstraites, il ne faut pas s'y méprendre : les experts disposent de leurs propres analogies et elles mènent elles-mêmes à l'intuition.

C'est cette fois la description de l'intuition chez Einstein qui nous apprend qu'être expert ne signifie pas s'abstraire de l'analogie. Si le résultat final représente formellement une vérité du monde, son écriture elle même reflète les intuition du chercheur, et le raisonnement qui le précède a fortiori. Ainsi par exemple Einstein décrit-il certains procédés menant à l'intuition qui consiste à s'imaginer son ressenti dans certaines situations physiques données. Par exemple, il s'imagine être dans une maison magiquement suspendue à très haute altitude quoiqu'encore dans le champs gravitationnel terrestre, puis il tente d'imaginer ce qu'il ressent lorsque la maison se met à chuter : puisque tout est en chute libre, pour l'observateur intérieur, c'est comme si l'attraction gravitationnelle était nulle, mais pour l'observateur extérieur elle est bien là puisque la maison chute. Ce type de situation, le changement de repère et l'analogie lui permettent de mieux comprendre les rapports entre champs électrique induit et champs magnétique variable.

Plus généralement il ne faut pas confondre expertise scientifique, rigueur dans la rédaction et intuition dans le raisonnement : ce qu'il s'efforce de rédiger sans ambigüité, le chercheur le voit parfois d'abord comme une intuition sur des objets simples, et s'il est bon enseignant c'est cette intuition qu'il tentera de transmettre avant la version formelle.

3.3 Une analyse des mathématiques par la métaphore

Plutôt que d'avoir comme sujet les humains et leurs analogie, G. Lakoff dans [3] prend le parti d'avoir comme sujet d'étude les mathématiques directement, avec le raisonnement que puisque ce sont de pures productions de l'esprit humain face à la nature, la compréhension de l'origine, des similitudes et des régularités des mathématiques nous en apprendra rétrospectivement beaucoup sur le fonctionnement du raisonnement chez l'humain.

Ainsi pour reprendre le cas précédemment développé, [3] détail la métaphore de l'*arithmétique comme ensemble d'objets* comme suit :

Ensemble d'objets		Arithmétique
Ensembles de même taille	$\longrightarrow$	Nombres
Taille de l'ensemble	$\longrightarrow$	"grandeur" du nombre
Plus gros	$\longrightarrow$	Plus grand
Plus petit	$\longrightarrow$	Plus petit
Le plus petit ensemble	$\longrightarrow$	L'unité
Adjoindre des ensembles	$\longrightarrow$	Additionner
Choisir un sous ensemble	$\longrightarrow$	Soustraire

L'arithmétique élémentaire comme ensemble d'objets

Je ne détaillerai pas ici l'intégralité de leur travail sur cette métaphore particulière mais ils l'étendent peu à peu à de plus large domaines des mathématiques et gardent en permanence en tête la comparaison avec le vocabulaire usuel pour décrire les idées correspondantes. Cette approche me semble tout à fait adaptée à mon objet d'étude, en effet si elle ne cherche pas directement à décrire l'intuition, elle décrit justement les mathématiques comme empilement d'intuitions successives, ce qui est non seulement compatible mais souhaitable étant donné notre définition précédente de l'intuition : chaque nouvelle avancée naît d'une nouvelle métaphore, non d'une découverte mais d'un déblocage de la perception précédemment établie du monde mathématique. La prochaine partie tend à montrer que ce déblocage ne se fait pas toujours sans heurt pour la communauté qui tend parfois à rejeter plus ou moins violemment

4 Les monstres : transgression de la beauté ?

"Je le vois, mais je ne le crois pas"

Lettre de G. Cantor à Dedekind en 1877

4.1 Une note sur la beauté mathématique

Les mathématiciens s'accordent à déceler une esthétique dans les mathématiques. Elle peut se trouver dans une formule élégante et simple qui condense de nombreux domaines des mathématiques, c'est l'exemple classique de beauté mathématique dû à Euler : $e^{i\pi} + 1 = 0$. Indépendamment de ce que l'on désigne comme beau, cette formule utilise ne nombreuses briques de bases des mathématiques — sa notation en *écriture polonaise inverse* fait encore mieux ressortir ce phénomène puisqu'on en discerne directement les éléments constitutifs et qu'on y reconnais les objets fondamentaux de nombreux domaines des mathématiques : $0\ 1\ e\ i\ \pi\ *\ \hat{}\ +\ =$. Cette beauté peut aussi se trouver dans de nombreux autres points : une preuve étonnement succincte, une preuve qui fait intervenir des résultats provenant d'un pan très éloigné des mathématiques, une preuve qui utilise une astuce mathématiquement simple — on entend parfois les enseignant de prépa dire des choses comme "n'oubliez pas que vous pouvez voir 4 comme $2 + 2$, mais aussi $2 * 2$ ou 2^2 selon ce qui vous arrange dans une preuve", parce qu'il est des problèmes délicats où changer légèrement une notation ou un point de vue simplifie drastiquement le raisonnement.

Cependant cette beauté est subjective, par exemple l'utilisation d'astuce peut parfois être vue comme élégant puisque simplifiant le raisonnement, et parfois perçue comme peu élégant puisqu'il faut "sortir du chapeau" une identité mathématique et l'utiliser, sans toujours pouvoir justifier de pourquoi c'est cette identité là qui est pertinente à cet instant donné de la preuve. Par ailleurs l'analyse de la *beauté* dépasse de beaucoup la portée de cette étude, je souhaitais la mentionner avant de décrire le pendant opposé que sont les monstres.

4.2 Des exemples de monstres ?

Il est des objets que les mathématiciens d'une époque donnée s'accordent à nommer des "monstres". Ça a été le cas de l'indicatrice des irrationnels — ou peigne de Dirichlet — qui est nulle presque partout mais n'est continue nulle part. Plus connue est la fonction de Weierstrass qui est continue en tout point mais dérivable nulle part.

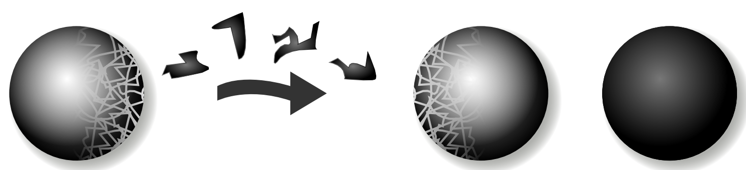
Si ces fonctions sont aujourd'hui mieux connues, elles n'en sont pas moins présentées encore aujourd'hui comme des monstres aux taupins qui eux même mettent du temps à les intégrer et à leur enlever ce qualificatif barbare. Mais ce n'est que parce qu'elles sont connues depuis longtemps que notre vision des choses a changé et est maintenant adaptée à ces cas extrêmes permis par les définitions.

Il y a plus longtemps les irrationnels eux même étaient les monstres des grecs qui ne pouvaient concevoir de nombres ne pouvant s'écrire sous la forme p/q et pourtant savaient montrer que $\sqrt{2}$ en faisait partie.

De la même façon, les nombres complexes qui nous sont maintenant introduits au lycée sans heurt pour les élèves, découverts par Cardan en 1545 puis formalisés par Bombelli en 1572, étaient pourtant toujours mal acceptés par Leibnitz plus de cent ans plus tard et ont longtemps étés qualifiés de nombres *impossibles* !

Je vais donc présenter succinctement deux *monstres* des temps modernes. Le premier en porte vraiment le nom et c'est la raison pour laquelle je le mentionne : il s'agit du *groupe monstre* ou *groupe de Fischer-Griess*. Sa définition et ses propriétés importent peu mais le nom est assez représentatif de ce que les algébristes modernes en ont pensés à sa découverte et en pensent encore — il existe en fait non pas un mais deux groupes monstres, le second étant appelé groupe monstre de Tarski pour le différencier. Il est qualifié ainsi en raison de son *ordre*, incroyablement élevé par rapport aux autres groupes ayant les mêmes propriétés.

Passons maintenant à quelque chose de relativement aisé à décrire, qui est formellement bien accepté, mais qui n'est est pas moins un monstre même pour des élèves en master de mathématiques : le paradoxe de Banach-Tarski.



Paradoxe de Banach-Tarski

Ce paradoxe dit qu'il est possible de découper une boule usuelle de dimension trois en un nombre finis de morceaux — en fait les preuves modernes le font même en exactement cinq morceaux — et de les translater de façon isomorphe, : c'est à dire sans en changer la taille, de sorte à obtenir deux boules identiques à la première à un déplacement isomorphe près.

Ce paradoxe se généralise dans les espaces de dimension finie supérieure à trois, mais ne fonctionne pas pour un disque en dimension deux [2]. La subtilité réside bien entendu dans le découpage : ces morceaux sont *non mesurables* au sens mathématique, sans quoi se produirait une contradiction due au fait que le résultat aurait une mesure strictement supérieur à la situation d'origine malgré

2. Ce n'est pas le seul résultat à avoir cette propriété, voir le retournement de la sphère ou paradoxe de Smale

l'utilisation de transformation isomorphes, ce qui est impossible. Il faut insister sur le fait que la non mesurabilité *ne signifie pas* qu'ils soient de mesure nulle, mais bien qu'il n'existe pas de mesure du tout. Rentrer dans les détails n'est pas nécessaire et serait fastidieux ici mais l'idée derrière est d'utiliser l'axiome du choix[3] pour tirer intelligemment des points dans l'ensemble qui nous intéresse afin d'en construire un sous-ensemble non mesurable.

En particulier, l'analogie classique d'un *découpage* ne peut absolument pas capturer ce phénomène : les morceaux sont des ensembles qui ne peuvent se définir que formellement et pas se représenter de façon usuelle. En effets, ils ressemblent chacun à la sphère tout entière : ils ont des points un peu partout dedans, et penser en découper un avec un couteau dans une orange par exemple, objet usuel de la métaphore de la boule, n'a absolument aucun sens.

4.3 Le lien avec l'intuition

Plusieurs liens peuvent être fait ici entre les monstres et l'intuition, mais la remarque commune est qu'on a tendance en mathématique à qualifier de *laid* ou d'*horrible* les constructions qui ne font pas appel à la vision que l'on a des objets mais au contraire, qui semble se complaire dans le fait d'aller à leur encontre. Ainsi Poincaré, dont on a vu non seulement l'intuition mais aussi toute l'introspection qu'il en a, est-il capable de dire à propos de la fonction de Weierstrass :

> La logique parfois engendre des monstres. On vit surgir toute une foule de fonctions bizarres qui semblaient s'efforcer de ressembler aussi peu que possible aux honnêtes fonctions qui servent à quelque chose. Plus de continuité, ou bien de la continuité, mais pas de dérivées [...]. Autrefois, quand on inventait une fonction nouvelle, c'était en vue de quelque but pratique ; aujourd'hui, on les invente tout exprès pour mettre en défaut les raisonnements de nos pères, et on n'en tirera jamais que cela.

Il mélange ici plusieurs choses, incluant notamment une notion curieuse d'utilité comme justification de la recherche mathématique, mais surtout on sent que l'idée même de construire ces fonctions est vicié, malsain, voué à l'échec à ses yeux — inutile de dire que la raison même pour laquelle il rejette cette fonction fait son utilité permanente en mathématiques, elle est le *contre-exemple* parfait.

3. C'est nécessaire pour la construction d'un tel ensemble et on peut montrer que dans Zermelo-Fraenkel sans l'axiome du choix il est impossible de construire un ensemble non mesurable

Ce qui se passe plus profondément, c'est un aller-retour incessant entre l'intuition-analogie et la formalisation, celle-ci nous forçant parfois à admettre que certains objets inattendus se conforment à la définition même s'ils ne vérifient pas l'intuition. Par exemple l'intuition d'une fonction continue est une fonction que l'on peut tracer avec un stylo sur un support physique. De là découle une définition formelle qui tente de capturer cette intuition, qui en mathématique peut s'écrire ainsi :

$$f \text{ est une fonction continue en } a \in I \text{ si } \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I$$
$$|x - a| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

On est ici en train de formaliser l'idée que pour tout seuil de distance vertical, on peut trouver un seuil de distance horizontal qui soit tel que si la distance entre deux element est sous le second, alors la distance entre les images correspondantes est sous le premier. Cette définition capture bien l'intuition que les mathématiciens ont de la continuité, mais n'est pas assez restrictive pour empêcher les monstres de passer : comme une définition plus restrictive serait *trop* restrictive, il est préférable d'accepter que certaines fonctions soient continues, c'est le cas par exemple de l'indicatrice des irrationnels sur $\mathbb{Q}$, malgré le peu d'intuition que l'on a dessus *a priori*.

On se trouve ici à la sortie d'un premier aller-retour : l'intuition mène à une formalisation, qui est telle que des éléments formellement valides violent l'intuition.

Il en va de même pour le paradoxe de Banach-Tarski : il est très délicat d'avoir une intuition claire sur ce qu'est un sous ensemble non mesurable, parce que le monde physique ne nous permet pas d'y accéder. En effet, tout objet de dimension trois a un volume et ce volume est mesurable, donc tout découpage physique de la boule ne permettrait pas de réaliser ce paradoxe. Mais étant donné la définition des ensembles, sur lesquels on fonde formellement le reste de nombreuses branches des mathématiques, la définition de mesure qui colle à l'intuition et l'axiome du choix, on ne peut exclure l'existence d'ensemble non mesurables et avec eux des monstres évoqués.

L'axiome du choix lui-même mérite qu'on s'y arrête tant son lien avec l'intuition en mathématique modernes est fort. Dans sa formulation la plus simple il dit que "Pour tout ensemble E, il existe une fonction qui à chaque partie non vide de E associe un élément de cette partie". Cette propriété est généralement perçue comme intuitivement vraie et cet axiome ne pouvant être démontré dans la construction classique des mathématiques il est courant que les mathématiciens le *rajoutent* à la théorie, c'est à dire l'affirment comme vrai, pour construire ce dont ils ont besoin. Cependant il est équivalent à un autre axiome qui dit que "tout ensemble E peut être muni d'un ordre "$\leq$" tel que toute sous partie non-vide de E dispose d'un plus petit élément" et cette définition est généralement perçue intuitivement comme fausse ou pour le moins délicate à satisfaire : pour s'en rendre compte, exercice, trouver un bon ordre sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels — indice : on ne sait pas en donner de formulation explicite, même à ce jour.

Mais alors, de quelles intuitions sortent les résultats monstrueux ? Comment Weierstrass en est-il arrivé à produire sa fonction continue partout mais dérivable nulle part ? Doit-on penser que, tel Poincaré dans la description de son insomnie, il s'est évertué à tenté de montrer que toute fonction continue était dérivable et, à défaut de preuve, a eu l'illumination contraire de construire une fonction qui invalide ce résultat ? Et quelles étaient alors les nouvelles analogies qui ont guidées sa construction ? A posteriori on peut imaginer, puisque c'est comme ça qu'on l'explique aujourd'hui en cours de mathématiques, que sa vision des choses a été guidée par une vision fractale de cette fonction qui est en tout point très "chaotique" quoique continue, et que jamais il n'est possible de placer en un point une tangente raisonnable.

5 Conclusion

Il semblerait que le processus créatif en mathématique, et avec lui l'intuition, soit basé sur plusieurs phénomènes conscients et plusieurs phénomènes non conscients.

L'analogie fait partie des phénomènes non conscients : si le chercheur maîtrise le sujet donné, les analogies servent à assembler un peu aléatoirement les idées potentielles, à tirer au hasard des associations, sur la base d'analogies plus ou moins superficielles, qui peuvent ou non mener au résultat : là n'est pas pour l'instant la question.

Le second processus non conscient est celui de la sélection dans ce hasard des idées qui mènent à la résolution d'un problème et là l'élégance ou la beauté mathématique a son mot à dire : lorsqu'un résultat est fructueux et n'est pas monstrueux il sera sélectionné par cette partie là, et lorsqu'il est monstrueux il faudra se libérer des anciennes analogies pour en comprendre la validité : c'est sans doute là l'un des traits des grands mathématiciens, Hadamard parle de penser "à côté".

Si je devais résumer la structure du raisonnement intuitif mathématique de sorte à comprendre l'émergence de monstres, la figure suivante pourrait être utilisée :

Analogie & métaphores	$\longrightarrow$	Intuition
$\nparallel$		$\updownarrow$
Monstres	$\longleftarrow$	Formalisation

Intuition, monstres et métaphores